Lec 39 任意项级数的精细审敛法

39.1 Dirchlet 精细判别法

定理 39.1

在级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 中, 若 $\{a_n\}\{b_n\}$ 满足如下条件:

1. a_n 部分和 $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 有界:$\exists M > 0$, 使 $|A_n| \leqslant M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
2. $b_n \downarrow 0(n \to \infty)$, 即 $\{b_n\}$ 单调递减趋于零.

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

证明

1. 证明:$\left|\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leqslant M\left(|b_1| + 2|b_n|\right)$

   记 $A_0 = 0$, 则

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n} (A_i - A_{i-1}) b_i\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^{n} A_i b_i - \sum_{i=1}^{n} A_{i-1} b_i\right| \\
&= \left|A_n b_n + \sum_{i=1}^{n-1} A_i b_i - \sum_{i=1}^{n-1} A_i b_{i+1}\right| \\
&= \left|A_n b_n + \sum_{i=1}^{n-1} A_i b_{i+1}\right| \\
&\leqslant |A_n|\,|b_n| + \sum_{i=1}^{n-1} |A_i|\,(b_i - b_{i+1}) \\
&\leqslant M|b_n| + M\,|b_1 - b_2 + b_2 - b_3 + \cdots + b_{n-1} - b_n| \\
&\leqslant M\left(|b_1|| + 2\,|b_n|\right)
\end{aligned}
$$

2. 同理, 有

$$
\left|\sum_{i=n}^{n+p} a_i b_i\right| \leqslant M\left(|b_{n+1}| + 2\,|b_{n+p}|\right) \tag{$\star$}
$$

3. 由于 $b_n \downarrow 0$, 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \boldsymbol{n}^*$, 当 $n \geqslant n_0$ 时,$|b_n| < \dfrac{\varepsilon}{3M}$. 从而 $|b_{n+1}| < \dfrac{\varepsilon}{3M}, |b_{n+p}| <$

$\dfrac{\varepsilon}{3M}, \forall p \in \mathbb{N}^*$. 带入 ($\star$) 式中:

$$\left|\sum_{i=n}^{n+p} a_i b_i\right| \leqslant M\left(|b_{n+1}| + 2|b_{n+p}|\right) \leqslant M\left(\frac{\varepsilon}{3M} + \frac{2\varepsilon}{3M}\right) = \varepsilon. \forall p \in \mathbb{N}^*$$

4. 依级数收敛的 Cauthy 准则, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛

注

1. 当 $b_n \uparrow 0$ 时,$-b_n \downarrow 0$ 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(-b_n)$, 因此当 $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 有界且 $b_n \uparrow 0$ 时, 仍有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.
2. 在 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 中, 若 $a = (-1)^{n-1}$, 且 $b_n \downarrow 0$, 则 $A_n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 + \cdots + (-1)^{n-1} = \begin{cases} 0 & n = 2m \\ 1 & n = 2m+1 \end{cases}$ 即 $|A_n| \leqslant M = 1. \forall n \in \mathbb{N}^*$. 依 Dirichlet 判别法,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} b_n$ 收敛. 这正是交错级数的 Leibniz 判别法.

39.2 Abel 精细判别法

定理 39.2

在级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 中, 若 $\{a_n\}\{b_n\}$ 满足如下条件:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛
2. $\{b_n\}$ 单调有界.

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

证明 令 $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$(常数). 依“有极限必有界”的原理,$\exists M > 0$, 使 $|A_n| \leqslant M, \forall n \in \mathbb{N}^*$ 从 $\{b_n\}$ 单调有界知, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 存在, 设 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$(常数), 且不妨设 $b_n \downarrow B(n \to \infty)$. 则 $(b_n - B) \downarrow 0(n \to \infty)$. 依 Dirichlet 判别法:$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(b_n - B)$ 收敛. 另外 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Ba_n$ 也收敛. 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[a_n(b_n - B) + Ba_n] = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 也收敛.

39.3 例题

例 39.1 设 $x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. 证明:$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^{\lambda}}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{\lambda}}$ 当 $\lambda > 1$ 时绝对收敛; 当 $0 < \lambda \leqslant 1$ 时条件收敛; 当 $\lambda \leqslant 0, x \neq k\pi$ 时发散.

解

1. 当 $\lambda > 1$ 时. 有 $\left|\frac{\cos nx}{n^{\lambda}}\right| \leqslant \frac{1}{n^{\lambda}}, \left|\frac{\sin nx}{n^{\lambda}}\right| \leqslant \frac{1}{n^{\lambda}}$. 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda}}$ 收敛. 依比较判别法,$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^{\lambda}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{\lambda}}$ 都绝对收敛;
2. 当 $0 < \lambda \leqslant 1$ 时. 令 $A_n = \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx (x \neq 2k\pi), b_n = \frac{1}{n^{\lambda}}$, 则 $b_n \downarrow 0 (n \to \infty)$, 且
$$\begin{aligned}
|A_n| &= \left|\frac{2\sin\frac{x}{2}(\cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx)}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \\
&= \left|\frac{\sin\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{2} + \sin\frac{5x}{2} - \sin\frac{3x}{2} + \cdots + \sin(n+\frac{1}{2})x - \sin(n-\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \\
&= \left|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \\
&\leqslant \left|\frac{2}{2\sin\frac{x}{2}}\right| = \left|\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\right| \triangleq M. \forall n \in \mathbb{N}^*.
\end{aligned}$$
依 Dirichlet 判别法, 当 $0 < \lambda \leqslant 1$ 时,$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^{\lambda}}$ 收敛 $(x \neq 2k\pi)$.
又有 $\left|\frac{\cos nx}{n^{\lambda}}\right| \geqslant \frac{\cos^2 nx}{n^{\lambda}} = \frac{1+\cos 2nx}{2n^{\lambda}} \geqslant 0$, 而 $0 < \lambda \leqslant 1$ 时,$\sum_{n=1}^{\inf} \frac{1}{n^{\lambda}}$ 发散,$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{n^{\lambda}}$ 收敛 (与上文类似,Dirichlet 判别法). 从而 $\frac{1+\cos 2nx}{2n^{\lambda}}$ 在 $0 < \lambda \leqslant 1$ 时发散. 依比较判别法,$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos nx}{n^{\lambda}}\right|$ 在 $0 < \lambda \leqslant 1$ 时发散. 从而当 $0 < \lambda \leqslant 1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^{\lambda}}$ 条件收敛. 同理,$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{\lambda}}$ 当 $0 < \lambda \leqslant 1$ 时条件收敛;
3. 当 $\lambda \geqslant 0$ 时,$a_n = \frac{\cos nx}{n^{\lambda}} \to 0 (n \to \infty)$ 不成立. 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$ 当 $\lambda \leqslant 0$ 时发散; 当 $x \neq k\pi$ 时,$a_n = \frac{\sin nx}{n^{\lambda}} \to 0 (n \to \infty)$ 不成立 $(\lambda \geqslant 0)$. 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ 当 $\lambda \leqslant 0, x \neq k\pi$ 时发散.

注
$$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}, x \neq 2k\pi$$

例 39.2

1. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$
2. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\,(\ln(\ln n))^{1+\alpha}}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}}-1)$
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda n}{n+1}\right)^{n}$ $(\lambda>0,\text{常数})$
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n}}(1+\frac{1}{n})^{n}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n}))$
8. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$

解

1. 设 $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^{\alpha}},x\in[2,+\infty),\alpha>0$, 则 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上连续, 非负, 单调递减, 且 $\int_2^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\ln x}{(\ln x)^{\alpha}}\overset{\ln x=u}{=}\int_{\ln 2}^{\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^{\alpha}}$ 当 $\alpha>1$ 时收敛, 当 $0<\alpha\leqslant 1$ 时发散. 从而级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$ 当 $\alpha>1$ 时收敛, 当 $0<\alpha\leqslant 1$ 时发散.
2. 设 $f(x)=\frac{1}{x\ln x\,(\ln(\ln x))^{1+\alpha}},x\in[3,+\infty),\alpha>0$, 则 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上连续, 非负, 单调递减, 且 $\int_3^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\ln(\ln x)}{(\ln(\ln x))^{1+\alpha}}\overset{\ln(\ln x)=u}{=}\int_{\ln(\ln 3)}^{\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^{1+\alpha}}$ 当 $\alpha>0$ 时收敛, 依 Cauthy 积分判别法 $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\,(\ln(\ln n))^{1+\alpha}}$ 收敛.
3. 利用 Taylor 公式,$\mathrm{e}^{x}=1+x+o(x)\Rightarrow \mathrm{e}^{x}-1\sim x(x\to 0)\Rightarrow \mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}}-1\sim\frac{1}{n^2}$, 从而由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 绝对收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}}-1)$ 绝对收敛.
4. 因为 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda}{n+1}=\lambda>0$. 所以当 $\lambda 0<\lambda<1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda n}{n+1}\right)^{n}$ 收敛; 当 $\lambda>1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda n}{n+1}\right)^{n}$ 发散; 当 $\lambda=1$ 时,$a_n=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}=\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^{n}=\left(\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{-1}}\right)^{\frac{-n}{n+1}}\to \mathrm{e}^{-1}\neq 0(n\to\infty)$, 所以当 $\lambda=1$ 时,$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda n}{n+1}\right)^{n}$ 发散
5. $0<\frac{1}{n!}<\frac{1}{(n-1)n}(n\geqslant 2)$ 且 $\frac{1}{(n-1)n}\sim\frac{1}{n^2}(n\to\infty),\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)n}$ 收敛, 可得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 收敛.
6. $|A_n|=|\sin 1+\sin 2+\cdots+\sin n|=\left|\frac{\cos\frac{1}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})}{2\sin\frac{1}{2}}\right|\leqslant\frac{1}{\sin\frac{1}{2}}\triangleq M,b_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\downarrow 0$, 依 Dirichlet 判别法知,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ 收敛. 又 $0<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<3$ 单增有界, 再依 Abel 判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n}}(1+\frac{1}{n})^{n}$ 收敛.

7. 利用 Taylor 公式,$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \Rightarrow x - \ln(1+x) \sim \frac{x^2}{2}(x \to 0) \Rightarrow \frac{1}{n} - \ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{2n^2}(n \to \infty)$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n^2}$ 绝对收敛. 所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\frac{1}{n} - \ln(1+\frac{1}{n}))$ 绝对收敛.
8. $\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) = \sin\pi\left(\sqrt{n^2+1} - n + n\right) = (-1)^n \sin\pi\left(\sqrt{n^2+1} - n\right) = (-1)^n \sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$, 且 $\sin\frac{\pi}{\sqrt{n+1}+n} \downarrow 0(n \to \infty)$, 依 Leibniz 判别法, 交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$ 收敛, 但 $\left|(-1)^n \sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right| \sim \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n} \sim \frac{\pi}{2n}(n \to \infty)$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2n}$ 发散. 所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sin(\pi\sqrt{n^2+1})\right|$ 发散, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ 条件收敛.

例 39.3 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ 的证明:

证明

$$
\begin{aligned}
S_{2n} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \\
&= \ln(2n) + \eta_0 + \alpha_1(n) - (\ln(n) + \eta_0 + \alpha_2(n)), \begin{cases} \eta_0 \simeq 0.5772, \\ \alpha_1(n) \to 0, \alpha_2(n) \to 0(n \to 0) \end{cases} \\
&= \ln(\frac{2n}{n}) + \alpha_1(n) - \alpha_2(n) \to \ln 2 + 0 - 0 = \ln 2(n \to \infty)
\end{aligned}
$$

且 $S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1} \to \ln 2 + 0 = \ln 2(n \to \infty)$.

故 $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n} \to \ln 2(n \to \infty) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$

✍ 作业 ex7.1:2(7)(10)(13),12(4)(6)(9)(10),15(1)(2)(4).